E.N.S.I. DE CHIMIE GROUPE NORD

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

A. 1° $y = f(x)$ étant une fonction indéfiniment dérivable, quelle est la dérivée d'ordre k de $x.y$?

2° n étant un entier positif ou nul, calculer :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n . e^{-x} . dx .$$

B. n étant un entier positif, on considère l'équation différentielle E_n :

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0 .$$

1° Montrer que cette équation admet parmi ses solutions des polynômes de degré n. On désignera par $N(x)$ celui de ces polynômes dont le terme de plus haut degré est $(-1)^n x^n$.

Calculer les coefficients de $N(x)$.

2° En utilisant le fait que :

$$x^p e^{-x}[x.N''(x) + (1 - x) N'(x) + n.N(x)] = 0$$

calculer par récurrence la valeur de :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} . x^p . N(x)\, dx \quad \text{lorsque} \quad p < n .$$

3° m étant un entier positif distinct de n ou égal à n, on désigne par $M(x)$ le polynôme solution de l'équation $E_m = 0$. Calculer :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} . M(x) . N(x)\, dx .$$

On admettra sans démonstration que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} . x^n . N(x)\, dx = (-1)^n (n!)^2 .$$

C. 1° y étant une solution quelconque (non nécessairement un polynôme) de $E_n = 0$, former l'équation différentielle F_n à laquelle satisfait la fonction $z = \dfrac{d^k y}{dx^k}$; $(k < n)$.

Lorsque $y = N(x)$, on posera : $z = N_k(x)$.

2° Utiliser l'équation F_n pour exprimer en fonction de $N_k(x)$:

$$\frac{d[e^{-x} . x^{k+1} . N'_k(x)]}{dx}$$

3° En remarquant que : $N_k(x) = N'_{k-1}(x)$, former une relation de récurrence entre les intégrales :

$$I_k = \int_0^{+\infty} e^{-x} . x^k . N_k(x) . M_k(x) . dx \quad \text{et} \quad I_{k-1} ,$$

dans lesquelles $M_k(x)$ désigne la dérivée d'ordre k de $M(x)$.

En déduire la valeur de I_k.

N.B. — B *et* C *sont en grande partie indépendants l'un de l'autre.*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail